Ervin DEÁK, Budapest

Ein grundsätzlich neuer didaktischer Zugang zu den numerischen unendlichen Reihen auf konstruktiv-genetischer Grundlage

1. Aus mathematischer Sicht gibt es zwei unverzichtbare Vorbedingungen der Reihentheorie, nämlich die Konvergenzbegriffe und der reelle Zahlkörper, die aus didaktischer Sicht zu den schwierigsten Inhalten der Schulmathematik gehören. Für die neue Strategie ist bezeichnend, dass – gewissermaßen umgekehrt – das Problemfeld der unendlichen Reihen als ein Terrain der Begriffsentwicklung in diesen beiden Richtungen benutzt wird.

2. Die folgende Tabelle zeigt eine strukturelle Übersicht über Aufgaben aus dem Problemfeld der geometrischen Reihen mit positiven Gliedern.

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">$v>0,\ q>0$</td></tr>
<tr><td></td><td>Aufgaben vom Typ [A]
$s=v+q\cdot s$</td><td>Aufgaben vom Typ [B]
$s\approx v+q\cdot v+q^2\cdot v+q^3\cdot v\ +\ \dots$ *</td></tr>
<tr><td>$q<1$</td><td colspan="2">ineinander umdeutbar; Lösung: $s=\frac{1}{1-q}\cdot v$</td></tr>
<tr><td>$q=1$</td><td colspan="2">*keine Lösung*</td></tr>
<tr><td>$q>1$</td><td>Lösung: $s=\frac{1}{1-q}\cdot v$ **</td><td>*keine Lösung*</td></tr>
</table>

* Diese unendliche Reihe wird nicht von vornherein als ein mathematisches Objekt betrachtet (s. auch 4.), sondern als eine eigenartige, einer Sachaufgabe angepasste *symbolische Interpretation* der Lösung s dieser Aufgabe. Dementsprechend benutzen wir nicht das Zeichen „=“, sondern das Zeichen „≈“; damit wird das *Ziel* angedeutet, die Reihe in den folgenden Entwicklungen zu einem mathematischen Objekt zu machen, dem ein *Zahlenwert* zukommt.

** Diese Formel gibt die Lösung der *Gleichung*; die Sachaufgabe ist nicht unbedingt lösbar.

3. *Einige Beispiele.* (a) *Der Wettlauf des Achilles mit der Schildkröte.* – Neben der klassischen Zenonschen Formulierung vom Typ [B] lässt sich dieses Problem auch im Stil [A] – also durch eine Gleichung einer gewissen

Struktur – beschreiben. Die Lösung dieser Gleichung wird der Reihe über die im Hintergrund stehende gemeinsame Sachaufgabe als „Summe" zugeordnet.

(b) *Das Uhrzeigerproblem.* – Um 12 Uhr überdeckt der große Zeiger den kleinen Zeiger. Wann treffen sie sich demnächst? Das könnte als ein Achilles-Problem im Stil [A] oder [B] behandelt und als [A]-Aufgabe auch leicht gelöst werden. Die dingliche Voraussetzung der Aufgabe ermöglicht aber eine eigenartige finite Lösung: Wenn sich der Vorgang nach dem ersten Zusammentreffen genauso fortsetzt, spielen sich im Verlauf von 12 Stunden 11 solche Wettläufe ab, und daher dauert ein Wettlauf $\frac{12}{11}$ Stunden). Wird auch der Achilles-Wettlauf anstelle der gradlinigen offenen Rennbahn auf einer geschlossenen Kreilinie veranstaltet, so kann diese Lösung übertragen werden.

(c) *Das Ziegelsteinproblem.* Diese Scherzfrage ist allbekannt: Das Gewicht eines Ziegelsteins ist gleich 1 Kilogramm mitsamt dem Gewicht eines halben Ziegelsteins; wieviel Kilogramm wiegt ein Ziegelstein? – Dies kann als das reinste Beispiel für die Kategorie [A] betrachtet werden. Benutzt man aber die entsprechende Gleichung als Iterationsgleichung, so ergibt sich die Interpretation des Problems im „Zenonschen" Stil [B]. So kann also jede Aufgabe der Art [A] zu einem Problem der Art [B] transformiert werden.

(d) *Das Schokoladenproblem.* In der Verpackung eines Schokoladestückes, das 1 Euro kostet, findet sich ein Bon. Zehn solche Bons können gegen ein weiteres Stück Schokolade eingetauscht werden, dem wiederum ein Bon beigelegt ist. Was ist der Geldwert der Schokolade ohne den Bon? – Diese Aufgabe gehört weder zu [A] noch zu [B], lässt sich aber zu beiden Formen transformieren. Es gibt aber auch eine eigenartige spielerische Lösung: Für neun Bons mitsamt einem vom Verkäufer ausgeliehenen Bon bekomme ich ein Stück Schokolade mitsamt einem Bon, den ich dem Verkäufer zurückgebe. Kann diese Lösungsmethode auf Verfolgungsprobleme übertragen werden?

4. Die Lernenden verfallen leicht in den Fehler, unendliche Reihen als „Summen" zu betrachten; es ist notwendig, dass sie sich darüber begriffliche Klarheit verschaffen. Allerdings zeigen unsere vorerst als symbolische Ausdrücke betrachteten unendlichen geometrischen Reihen mit positiven Gliedern Eigentümlichkeiten, die an die Eigenschaften der Addition anklingen, wie z. B. diese „Assoziativitätseigenschaft":

$$(v+qv)+(q^2v+q^3v)+(q^4v+q^5v)+\ \dots \approx \frac{v(1+q)}{1-q^2} =$$

$$=\frac{v}{1-q} \approx v+q\cdot v+q^2\cdot v+q^3\cdot v \ + \ \ldots \quad (0<q<1)$$

u. Ä. Solche Erfahrungen stehen am Anfang der Entwicklung der unendlichen Reihen zu mathematischen Objekten.

5. *Vollständigkeit.* Erweitern wir das Zenonsche Verfolgungsmodell durch Einbeziehung einer zweiten Schildkröte S_2, die im Gegensatz zur Zenonschen Schildkröte S_1 ihre Geschwindigkeit von Abschnitt zu Abschnitt ändert, aber niemals schneller als S_1 läuft. S_2 und S_1 starten gleichzeitig und von derselben Stelle. Das fundamentale Problem in dieser Situation lautet:

Muss Achilles S_2 treffen, falls er S_1 einholt? Beispiel:

(I) Der Weg des Achilles bis zum Zusammentreffen mit S_1 , in Abschnitten, die nach der Bewegung von S_1 ausgerichtet sind.

(II) Der Weg des Achilles bis zum Zusammentreffen mit S_2 , in Abschnitten, die nach der Bewegung von S_2 ausgerichtet sind.

(I)	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\ldots$
(II)	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}+\ldots$

Obwohl Achilles S_1 einholt und daher S_2 überholt, wird er – im Gegensatz zur physikalischen Wirklichkeit – nicht mit S_2 zusammentreffen, da der Reihe (II) keine rationale Zahl als „Summe“ zugeordnet werden kann. (Anstelle des bekannten Standardbeweises dieser Tatsache haben wir einen durchaus „schulmäßigen“ Beweis ausgearbeitet.) *Unser Anliegen, dass die „Verfolgungsprozesse” eine adäquate mathematische Beschreibung erfahren, erzwingt die Vervollständigung des Zahlenbereichs* (die Erweiterung des rationalen Zahlkörpers zum Körper der reellen Zahlen).

6. *Konvergenz. Jede* Reihe mit positiven Gliedern kann als symbolischer Ausdruck eines Verfolgungsprozesses betrachtet werden; allerdings muss man im Allgemeinen das Modell wählen, wo „Achilles“ eine „launenhafte Schildkröte“ verfolgt. (Diese ist eine Zenonsche Schildkröte genau im Spezialfall, dass es sich um eine *geometrische* Reihe handelt.) Eine Reihe

$$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \text{ mit } a_n>0 \ \ (n=0,1,2,\ldots)$$

kann man ja als die Reihe

$$a_0 + \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 + \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 + \frac{a_3}{a_2} \cdot a_2 + \ldots$$

auffassen und demnach so interpretieren: Während Achilles die Strecke a_n zurücklegt, gewinnt die Schildkröte den neuen Vorsprung $\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_n$; ihre Geschwindigkeit verhält sich in dieser Etappe zur Geschwindigkeit des Achilles wie a_{n+1} zu a_n. Wir reden von der „Konvergenz" der Reihe im Sinne der Lösbarkeit der Sachaufgabe („Achilles holt die Schildkröte ein"). Die allmähliche Entwicklung des *mathematischen* Konvergenzbegriffes erfolgt über die Untersuchung der Restsummen (die bei geometrischen Reihen ebensolche Reihen und daher leicht interpretierbar und berechenbar sind).

7. *Einstieg in die Reihentheorie.* Die Entwicklungen unter 5. und 6. führen zum Vergleichungsprinzip, dem Grundstein für die Theorie der Reihen mit positiven Gliedern auf der Basis des reellen Zahlkörpers. Über den mathematischen Konvergenzbegriff kann nunmehr die Reihentheorie auf Reihen mit beliebigen Gliedern erstreckt werden (wo die Verfolgungsmodelle nicht mehr in Betracht kommen, wo aber für die mathematische Theorienbildung überhaupt keine außermathematischen Modelle mehr nötig sind).

8. Etliche Prinzipien, die diesem Konzept zugrunde liegen, können in diesem gedrängten Bericht nicht dargelegt werden. Neben einigen konkreten Grundsätzen, die hier berührt wurden, sind auch allgemeine Prinzipien im Geist der genetischen Methode und des mathematikdidaktischen Konstruktivismus berücksichtigt, die sich auf eine Reihe von verschiedenen Gebieten der Mathematik im Unterricht erstrecken lassen und diesen ein besonderes einheitliches Gepräge geben. Die Einheitlichkeit wird auch durch eine ganz kleine Anzahl sehr konsequent angewandter „Fundamentaler Ideen" verstärkt, die sich durch all diese Gebiete durchziehen.

9. Insbesondere soll der Begriff der Reellen Zahl keineswegs in *einer einzigen* „Lehrstoff-Einheit", die an irgendeine bestimmte Stelle des Lehrplans platziert wird, „erledigt" werden; vielmehr sollte in jedem dazu geeigneten Gebiet der Mathematik ein entsprechend angepasster, dennoch den einheitlichen Richtlinien folgender Entwicklungsweg angebahnt werden.

10. Dieses Programm ist in einem umfangreichen Manuskript ausgearbeitet und teilweise publiziert. Im Hintergrund stehen langjährige Unterrichtsversuche, experimentelle Lehrbücher, Lehrerfortbildungskurse und ein seit 18 Jahren laufender Zyklus von verschiedenen, aber im obigen Sinn zusammenhängenden Spezialvorlesungen für Studenten und für Doktoranden an der Eötvös Loránd Universität (ELTE) Budapest.